Poniższe zadania w większości dotyczą arkuszy P1, P2 i P3 opracowanych przez CKE i odpowiadają poziomem zadaniom zamkniętym i prostym zadaniom otwartym. Dla wybitnych "chumanistów" ;) pod każdym zadaniem została umieszczona podpowiedź. Wybór nie jest kompletny, ale zrobienie wszystkich zadań ze zrozumieniem znacznie zwiększa szansę zdania tegorocznej matury. Lista zostanie podsumowana sprawdzianem :-D

Trójkąt równoboczny

1. Wyznacz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długość 6 cm.
   Podpowiedź: Wyznacz długość boku przekształcając wzór na wysokość trójkąta równobocznego (odwracasz kota ogonem: wyznaczasz *a* względem *h*), a następnie skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.
2. Wyznacz wysokość trójkąta równobocznego, którego pole wynosi $9\sqrt{3}$.
   Podpowiedź: Wyznacz długość boku przekształcając wzór na pole trójkąta równobocznego (odwracasz kota ogonem: wyznaczasz *a* względem *P*). Następnie wyznacz wysokość z wiadomego wzoru.
3. Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym wynosi 4π. Wyznacz pole tego trójkąta.
   Podpowiedź: Wyznacz promień koła, a następnie wysokość trójkąta, wiedząc jaką częścią tej wysokości jest promień. Z wysokości wyznacz bok i pole.
4. Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokością jest odcinek AB, gdzie $A = (-1, -2)$, $B = (2, 1)$.
   Podpowiedź: Wyznacz długość odcinka *AB*, a następnie bok trójkąta.

Kwadrat

5. Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku AB, gdzie $A = (-3, 2)$, $B = (4, 1)$.
   Podpowiedź: Wyznacz długość odcinka *AB*, a następnie skorzystaj ze wzoru na przekątną kwadratu.
6. Wyznacz pole koła wpisanego w kwadrat, jeśli pole koła opisanego na kwadracie wynosi 32π.
   Podpowiedź: Wyznacz promień koła opisanego, co od razu daje przekątną kwadratu, a następnie z przekątnej wyznacz bok kwadratu, co od razu daje promień koła wpisanego. Jak tego nie widzisz, to sobie narysuj :-)
7. Przekątna kwadratu jest o 10 cm dłuższa od boku kwadratu. Wyznacz obwód i pole tego kwadratu.
   Podpowiedź: Ułóż równanie opisujące podaną zależność przekątnej ($a\sqrt{2}$) i boku *a*. Po klasycznym uporządkowaniu równania (niewiadome na lewą stronę) musisz wyłączyć *a* przed nawias i podzielić obustronnie to równanie przez wyrażenie w nawiasie... Jeszcze tylko uwolnij mianownik od niewymierności i masz gotowy bok kwadratu. Podnieś do kwadratu, uporządkuj i gotowe :-).
8. Ile razy pole koła opisanego na kwadracie jest większe od pola pola wpisanego w ten kwadrat?
   Podpowiedź: Wyraź promienie obu kół przez bok kwadratu *a* i skorzystaj z oczywistej zależności, że pola figur podobnych, to kwadrat skali podobieństwa. Jak nie rozumiesz, to policz sobie oba pola i podziel przez siebie (*a* powinno się skrócić).

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

9. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli
   a) $sin\alpha = \frac{8}{17}$, b) $cos\alpha = 0{,}75$, c) $tg\alpha = \sqrt{15}$.
   Podpowiedź: Narysuj trójkąt prostokątny z odpowiednio dobranymi bokami, wyznacz trzeci bok z twierdzenia Pitagorasa i odczytaj wartości pozostałych funkcji. Możesz też skorzystać z "jedynki trygonometrycznej".
10. Wyznacz kąt ostry, jeśli sinus tego kąta jest równy cosinusowi.
    Podpowiedź: Dla wtajemniczonych: wyznacz tangens. Jak nie wiesz o co chodzi, to zawsze możesz skorzystać z "jedynki trygonometrycznej".
11. Wyznacz cosinus kąta ostrego, jeśli jest on 9 razy większy od sinusa tego kąta.
    Podpowiedź: Wtajemniczeni mogą narysować trójkąt z wiadomym tangensem. Reszta niech skorzysta z "jedynki trygonometrycznej" ;-).

Walec

12. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o polu 64.
    Podpowiedź: Wymiary kwadratu to po prostu wysokość walca i średnica jego podstawy.
13. Oblicz objętość walca zwiniętego z kwadratu o polu 64 (krawędzie są złączone na styk).
    Podpowiedź: Wymiary walca to po prostu wysokość i obwód podstawy ($2\pi r$).
14. Wyznacz promień podstawy walca o wysokości 5 cm, jeśli połowa pola powierzchni bocznej jest równa sumie pól obu podstaw.
    Podpowiedź: Promień wyznaczysz rozwiązując równanie opisane w treści: $\frac{1}{2}Pb = 2Pp$.

Stożek

15. Jaki kąt rozwarcia ma stożek, w którym pole powierzchni bocznej jest dwa razy większe od pola powierzchni podstawy?

   Podpowiedź: Podziel wyrażenia opisujące podane wielkości: $\frac{Pb}{Pp}$, poskracaj i zobacz ile razy tworząca *l* jest większa od promienia *r*.

16. Oblicz objętość stożka, którego przekrojem osiowym jest trójkąt prostokątny równoramienny o polu 4.

   Podpowiedź: Narysuj odpowiednio obrócony trójkąt (zauważ że to połowa kwadratu), a następnie wyznacz wysokość i promień stożka.

17. Koło o powierzchni 36π dzielimy na trzy równe części i zwijamy z nich trzy identyczne stożki (krawędzie łącząc na styk). Jaką objętość ma każdy z tych stożków?

   Podpowiedź: Promień pociętego koła, to tworząca każdego stożka, więc znasz już *l*. Znasz też jedną trzecią obwodu pociętego koła, która tworzy obwód podstawy stożka, czyli jest równa $2\pi r$. Po obliczeniu *r* jeszcze tylko należy obliczyć wysokość (z tw. Pitagorasa) i gotowe.

18. Oblicz objętości i pola powierzchni stożków otrzymanych z obrotu trójkąta o bokach 6, 8, 10 wokół kolejnych boków.

   Podpowiedź: Ten trójkąt jest oczywiście prostokątny (ma dwa razy większe boki od klasycznego trójkąta "egipskiego"). Stożki powstałe w wyniku obrotu wokół przyprostokątnych nie sprawiają żadnego problemu. Zauważ, że w trzeciej sytuacji otrzymasz dwa stożki (złączone podstawami) o zsumowanej wysokości równej 10. Promieniem jest tutaj wysokość wyjściowego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną o długości 10. Posłuż się (wiadomym) polem trójkąta, aby wyznaczyć ten promień-wysokość.

Sześcian

19. Wyznacz długość przekątnej sześcianu o objętości 1 litra. Wynik podaj z dokładnością do 1 mm.

   Podpowiedź: 1 litr to dm^3. Przekątna sześcianu i krawędzi *a* ma długość $a\sqrt{3}$.

20. Jakie pole powierzchni całkowitej ma sześcian, w którym przekątna jest o 2 dłuższa od krawędzi?

   Podpowiedź: Długość przekątnej otrzymasz rozwiązując równanie porównujące przekątną $a\sqrt{3}$ i krawędź a. Aby rozwiązać to równanie wyłącz *a* przed nawias. Dalej podobnie jak w analogicznym zadaniu z przekątną kwadratu.

21. Oblicz objętość kuli wpisanej w sześcian, w którym suma długości wszystkich krawędzi wynosi 36.

   Podpowiedź: Skorzystaj z tego, że średnica kuli opisanej na sześcianie to przekątna tego sześcianu.

22. Wyznacz powierzchnię kuli opisanej na sześcianie o powierzchni całkowitej 192 cm^2.

   Podpowiedź: Wyznacz najpierw długość krawędzi tego sześcianu.

Prostopadłościan

23. Wyznacz przekątną prostopadłościanu o krawędziach 9m, 12m, 20m.

   Podpowiedź: Narysuj starannie ten prostopadłościan, a zwłaszcza trójkąt prostokątny, w którym występuje przekątna.

24. Oblicz P_c prostopadłościanu o objętości 80, jeśli krawędzie tego prostopadłościanu są w stosunku 5:8:16.

   Podpowiedź: Zgodnie z podanym stosunkiem oznacz krawędzie prostopadłościanu przez $5t, 8t, 16t$, a następnie ułóż i rozwiąż równanie z niewiadomą *t*.

25. Wyznacz wymiary prostopadłościanu, jeśli przekątne jego ścian mają długości: $10,\ 17,\ 3\sqrt{29}$.

   Podpowiedź: Oznacz długości krawędzi np. a, b, c, a następnie ułóż i rozwiąż układ trzech równań (Pitagoras!) z tymi niewiadomymi (wystarczy odjąć stronami dwa pierwsze równania i otrzymane równanie zestawić z trzecim - jako układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi).

Ciąg arytmetyczny

26. Suma trzech liczb tworzących rosnący ciąg arytmetyczny wynosi 24, a największa liczba jest pięć razy większa od najmniejszej. Wyznacz te liczby.

   Podpowiedź: Skorzystaj ze wzoru na średnią arytmetyczną dla wyrazów a, b, c: $2b = a + c$ aby wyznaczyć *b*, a następnie ułóż i rozwiąż prosty kład równań z niewiadomymi *a* i *c*. Pamiętaj, że ciąg ma być rosnący.

27. Wyznacz x jeśli liczby $x^2, 1, x$ tworzą w podanej kolejności malejący ciąg arytmetyczny.

   Podpowiedź: Skorzystaj ze wzoru na średnią arytmetyczną, rozwiąż równanie kwadratowe i pamiętaj, że ciąg ma być malejący.

28. W ciągu arytmetycznym $a_2 = -1, a_6 = 9$. Wyznacz a_1 oraz r.

   Podpowiedź: Wyraz szósty otrzymasz dodając do wyrazu drugiego pewną liczbę różnic *r*.

29. Oblicz sumę 200 kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego: 299, 296, 293, ...

   Podpowiedź: Możesz skorzystać z gotowego wzoru w "Wwm CKE", który wymaga znajomości pierwszego wyrazu i różnicy (no i oczywiście liczby sumowanych wyrazów), albo obliczyć dwusetny wyraz ciągu, a następnie pomnożyć średnią arytmetyczną pierwszego i ostatniego wyrazu przez 200.

Ciąg geometryczny

30. Iloczyn trzech liczb tworzących monotoniczny ciąg geometryczny wynosi -216, a trzeci wyraz jest o 9 większy od pierwszego. Wyznacz ten ciąg.
    Podpowiedź: Skorzystaj ze wzoru na średnią geometryczną dla wyrazów *a*, *b*, *c*: $b^2 = ac$ aby wyznaczyć *b*, a następnie ułóż i rozwiąż prosty układ równań z niewiadomymi a i *c*. Z otrzymanych dwóch rozwiązań wybierz to, które daje ciąg monotoniczny.
31. Wyznacz x jeśli liczby $2x - 1, \sqrt{3},\ 2x + 1$ tworzą w podanej kolejności niemonotoniczny ciąg geometryczny.
    Podpowiedź: Skorzystaj z wzoru na średnią geometryczną $b^2 = ac$ i rozwiąż równanie z niewiadomą *x*. Z otrzymanych rozwiązań wybierz to, które daje ciąg niemonotoniczny.
32. W ciągu geometrycznym $a_3 = 54,\ a_5 = 81$. Wyznacz q oraz a_1.
    Podpowiedź: Pierwszy wyraz można otrzymać od razu korzystając z faktu, że trzeci wyraz jest średnią geometryczną wyrazu pierwszego i piątego. Iloraz *q* można wyznaczyć wiedząc, że $a_5 = a_3 \cdot q^2$.
33. Suma trzech liczb tworzących malejący ciąg geometryczny wynosi 7, a iloczyn tych liczb wynosi 8. Wyznacz ten ciąg.
    Podpowiedź: Szukane liczby oznacz przez *a, b, c*. Ze średniej geometrycznej i znanego iloczynu wyznacz *b*, a następnie ułóż i rozwiąż prosty układ równań z niewiadomymi a i *b*. Z dwóch rozwiązań wybierz to, które daje malejący ciąg geometryczny.

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej

34. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz zbiór wartości funkcji $y = -(x + 3)(x - 1)$.
    Podpowiedź: Znasz miejsca zerowe, a wierzchołek leży w połowie, masz więc *p*. Gdy podstawisz odciętą *p* wierzchołka za *x*, to obliczysz rzędną wierzchołka q, czyli masz już postać kanoniczną. Jak nie wychodzi, to wymnóż i zacznij od postaci ogólnej w celu wyznaczenia *p* i *q* z wiadomych wzorów. Z postaci kanonicznej od razu widać przedziały monotoniczności i zbiór wartości.
35. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej, której wykres przechodzi przez punkt $P(0, -6)$, a wierzchołek ma współrzędne $(2,2)$.
    Podpowiedź: Zacznij od postaci kanonicznej, w której nie znasz współczynnika *a*, który łatwo wyznaczysz, gdy podstawisz za *x* i *y* współrzędne punktu *P*. Teraz już łatwo, bo możesz zastosować chytrą sztuczkę z wzorem skróconego mnożenia, co od razu da postać iloczynową, a jak nie dasz rady, to po prostu przekształć postać kanoniczną do postaci ogólnej, a dalej tradycyjnie wyznacz miejsca zerowe.
36. Wyznacz wierzchołek funkcji kwadratowej, jeśli jej miejscami zerowymi są liczby -1 i -5, a do wykresu tej funkcji należy punkt $P(1,6)$.
    Podpowiedź: Zacznij od postaci iloczynowej, w której nie znasz współczynnika *a*, który łatwo wyznaczysz korzystając z punktu *P*. Dalej już łatwo - celem jest postać kanoniczna ze współrzędnymi wierzchołka (p, q).

Nierówności kwadratowe

37. Rozwiąż nierówności: a) $x^2 > 3$, b) $x^2 < 3x$, c) $x^2 + 4x \leq -4$, d) $x^2 + 4x \geq 12$.
    Podpowiedź: przenieś wszystko na lewą stronę i uporządkuj, wyznacz miejsca zerowe, naszkicuj wykres i odczytaj z niego rozwiązanie.
38. Rozwiąż nierówności: a) $-(x - 3)(x + 4) < 0$, b) $-(2 - x)(2x - 1) \leq 0$.
    Podpowiedź: odczytaj miejsca zerowe i odczytaj rozwiązania z wykresu.
39. Rozwiąż nierówności: a) $(x + 3)^2 < x + 3$, b) $(x + 3)^2 > (x + 3)(1 - x)$.
    Podpowiedź: przenieś wszystko na lewą stronę i wyłącz wspólny czynnik przed nawias, po uporządkowaniu wyrażenia w nawiasie wyznacz miejsca zerowe i odczytaj rozwiązanie z wykresu.

Nierówności liniowe

40. Rozwiąż nierówność: $\frac{x-3}{2} - \frac{x-1}{3} < x + 3$ i wskaż największą liczbę całkowitą niespełniającą tej nierówności.
    Podpowiedź: Pozbądź się ułamków odpowiednio mnożąc nierówność stronami. Uważaj na drobne pułapki: tzw. "minus przed nawiasem" i "dzielenie nierówności przez minus" ;-) Rozwiązanie starannie przedstaw na osi liczbowej i odczytaj szukaną liczbę.
41. Rozwiąż nierówność: $(2x - 3)^2 - (x - 3)(x + 3) \geq (x - 3)(3x + 2)$ i wskaż wszystkie liczby naturalne spełniające tą nierówność.
    Podpowiedź: Uporządkuj nierówność i narysuj jej rozwiązanie w postaci odpowiedniego przedziału.

Proste prostopadłe i równoległe

42. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(-1,3)$ i równoległej do prostej $y = \frac{1}{3}x$.

Podpowiedź: Proste równoległe mają takie same współczynniki kierunkowe *a*, podstaw współrzędne punktu *A* żeby wyznaczyć wyraz wolny *b*.

43. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(-3,2)$ i prostopadłej do prostej $y = \frac{2}{3}x$.

Podpowiedź: Wykorzystaj to, że iloczyn współczynników kierunkowych prostych prostopadłych wynosi -1, wyraz wolny *b* wyznacz podstawiając do równania prostej współrzędne punktu *A*.

44. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta *ABC* poprowadzoną z wierzchołka *C*, jeśli $A = (4,-1), B = (-2,-3), C = (-1,4)$.

Podpowiedź: Najpierw wyznacz współczynnik kierunkowy prostej *AB*, czyli $a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, potem jak w poprzednim zadaniu, bo wysokość jest prostopadła do odcinka *AB*.

45. Ortocentrum trójkąta, to punkt przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta. Wyznacz ortocentrum trójkąta o wierzchołkach w punktach $A(-3,-1), B(2,4), C(5,-5)$.

Podpowiedź: Wyznacz równania dwóch prostych zawierających wysokości tego trójkąta, a następnie rozwiąż układ równań tych prostych.

Równanie okręgu

46. Dany jest okrąg o równaniu $(x-\sqrt{3})^2 + (y+\pi)^2 = 7$. Wyznacz długość tego okręgu, a także pole koła, które ten okrąg ogranicza.

Podpowiedź: Do wszystkiego wystarczy promień, środek jest nieważny.

47. Jaka jest najmniejsza odległość punktów okręgu $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 2$ od prostej o równaniu $x = 2$?

Podpowiedź: Przyjrzyj się rysunkowi: jak znając środek i promień okręgu, oraz współrzędne punktów prostej, wyznaczyć najmniejszą odległość? Potrzebne są trzy liczby.

48. Wyznacz środek i promień okręgu o równaniu: $x^2 - 2x + y^2 + 4y = -1$.

Podpowiedź: Uporządkuj to równanie do postaci pozwalającej "zwinąć" dwa wyrażenia z lewej strony równania za pomocą wzorów skróconego mnożenia: $(x^2 - 2x + \ldots) + (y^2 + 4y + \ldots) = -1 + \ldots + \ldots$, co da postać kanoniczną równania okręgu.

Wartość bezwzględna

49. Odczytaj interpretację odległościową na osi liczbowej dla równania $|x-4| = 5$, a następnie rozwiąż to równanie.

Podpowiedź: Odległość... od ... jest równa... (koza to *x*, palik jest wbity w 4, a sznurek ma długość 5 ;-)

50. Rozwiąż nierówności: a) $|x-3| \le 2$, b) $|x+5| \ge 3$, c) $|2x-7| < 1$, d) $\sqrt{(x+10)^2} > 5$.

Podpowiedź: zastosuj interpretację odległościową na osi liczbowej. W podpunkcie c) zacznij od podzielenia nierówności przez 2. W podpunkcie d) zastosuj świadomie wzór ze strony 1. "Wwm CKE".

51. Napisz nierówność z wartością bezwzględną, która jest spełniona dla wszystkich liczb z: a) przedziału $\langle -3, 6 \rangle$, b) sumy przedziałów $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.

Podpowiedź: W podpunkcie a) potraktuj przedział, jak teren dostępny dla "kozy". Wystarczy odpowiednio umieścić palik i dobrać długość sznurka. W b) wbij palik w środku strefy dla kozy niedostępnej (i uwiąż tam psa ;-).

Potęgi i pierwiastki

52. Przedstaw w postaci jednej potęgi $\frac{(0,25)^{-4} \cdot 4^3}{8^{-2} : 2^{10}} = \square^{\square}$.

Podpowiedź: Zamień wszystkie podstawy na 2 i zastosuj prawa działań na potęgach (str. 1. "Wwm CKE").

53. Przedstaw w postaci jednego pierwiastka odpowiedniego stopnia $\sqrt[3]{9\sqrt{3}} = \sqrt[\square]{\square^{\square}}$

Podpowiedź: Możesz przedstawić to wyrażenie jako 3 do pewnej potęgi wymiernej. Odpowiednie wzory w "Wwm CKE" na str. 1.)

Procenty

54. Wyznacz liczbę, której 16% wynosi 72.
    Podpowiedź: Daruj sobie proporcję, zamiast tego rozwiąż równanie: $0{,}16x = 72$. Możesz skorzystać z kalkulatora ;-)
55. Jakim procentem liczby 75 jest liczba 24?
    Podpowiedź: Rozwiąż równanie $p\% \cdot 75 = 24$.
56. O ile procent i w którą stronę zmieni się cena, jeśli najpierw wzrośnie o 25%, a następnie spadnie o 16%?
    Podpowiedź: Każda zmiana ceny odpowiada odpowiedniemu pomnożeniu tej ceny: najpierw przez 1,25 a potem przez 0,84.
    Jak zinterpretujesz iloczyn tych liczb?
57. Po trzykrotnej obniżce wartości, za każdym razem o 20%, cena roweru wynosi 1024 zł. Ile kosztował rower przed obniżkami?
    Podpowiedź: Każdej obniżce odpowiada pomnożenie poprzedniej ceny przez 0,8. Ułóż równanie z niewiadomą pierwszą ceną i je rozwiąż.

Logarytmy

58. Wyznacz wartość podanych logarytmów, jeśli przyjmiemy, że $\log_3 2 = a$:
    a) $\log_3 0{,}25$, b) $\log_3 6$, c) $\log_9 2$, d) $\log_{27} 8$, e) $\log_6 2$.
    Podpowiedź: Każdy z podanych logarytmów da się zamienić na wyrażenie zawierające $\log_3 2$. Wystarczy skorzystać z wzorów z 2. strony "Wwm CKE". W podpunktach c,d,e skorzystaj ze wzoru na zmianę podstaw logarytmu.
59. Oblicz: $\log_8 0{,}5 \cdot \log_{0{,}2} 125$.
    Podpowiedź: Posłuż się definicją i wyznacz z osobna wartość każdego z logarytmów. Zauważ, że $0{,}5 = 2^{-1}$, a $0{,}2 = 5^{-1}$.
60. Oblicz: $\log_6 9 + \log_6 8 - \log_6 2$.
    Podpowiedź: Posłuż się wzorami na logarytm iloczynu i ilorazu ("Wwm CKE")

Dziedzina i miejsca zerowe funkcji wymiernej; równania wymierne

61. Rozwiąż równanie $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-49} = 0$.
    Podpowiedź: Która z liczb zerujących licznik jest, a która nie może być (dlaczego?), rozwiązaniem tego równania?
62. Rozwiąż równanie $\frac{-x^2-x+6}{x-2} = 3$.
    Podpowiedź: Jeśli nie zauważysz możliwości skrócenia wyrażenia po lewej stronie równania, to pomnóż obie strony przez $x-2$, a następnie uporządkuj i rozwiąż równanie kwadratowe. Które z rozwiązań równania kwadratowego jest, a które nie może być, rozwiązaniem danego równania?
63. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^3-3x^2-10x}{x^3-25x}$.
    Podpowiedź: Rozłóż "licznik" i "mianownik" na czynniki i odczytaj dziedzinę. Po skróceniu takich samych czynników w "liczniku" pozostanie czynnik wyznaczający miejsce zerowe.

Piotr Kryszkiewicz