Geometria analityczna - zadania elementarne

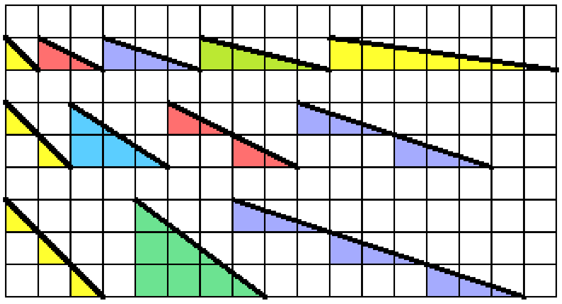
Zadania z części **A** dotyczą typowych i uproszczonych sytuacji, i mają na celu pokazać, co można odczytać z rysunku.
W części **B** znajdują się typowe zadania na "wyznaczanie", do których umiejętność "czytania rysunku" jest niewystarczająca.

A. Geometria analityczna na papierze w kratkę.

Uwaga: dla każdego rysunku jedna kratka to jedna jednostka!

1. **Długość odcinka.** Odczytaj długości wszystkich narysowanych odcinków.

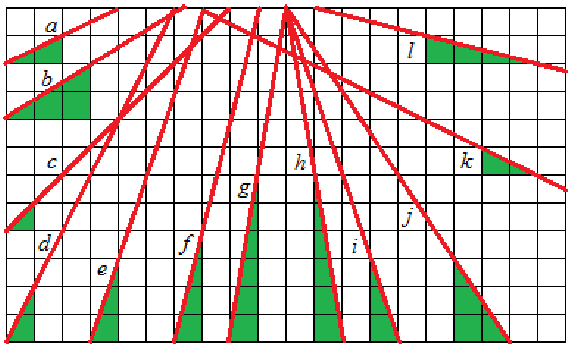
   Wskazówka: Każdy odcinek to przeciwprostokątna w odpowiednim trójkącie prostokątnym (lub wielokrotność takiej przeciwprostokątnej). Wystarczą pamięciowe obliczenia wynikające z tw. Pitagorasa.



2. **Współczynnik kierunkowy prostej.** Odczytaj z rysunku współczynniki kierunkowe czerwonych prostych.

   Wskazówka: Wystarczy przyjrzeć się zielonym trójkątom "rozwieszonym" na punktach kratowych i wyznaczyć $\boldsymbol{a}$ wg zasady "pion przez poziom", czyli obliczając stosunek pionowej przyprostokątnej trójkąta do poziomej przyprostokątnej z uwzględnieniem znaku:

   - "+" jeśli trójkąt "wisi" z prawej strony prostej,
   - "-" jeśli trójkąt "wisi" z lewej strony prostej.



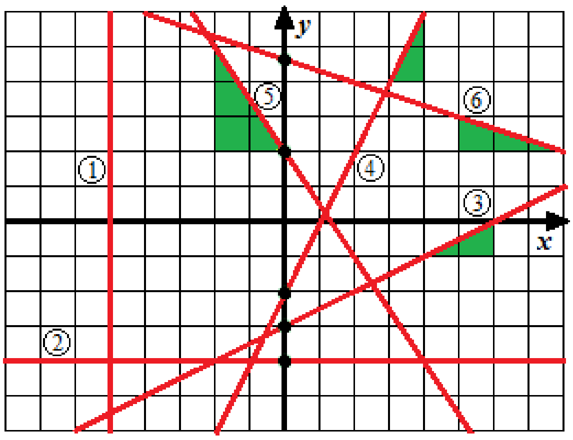
3. **Równanie prostej.** Odczytaj z rysunku równania ponumerowanych prostych.

   Wskazówki: Pierwsze dwie proste, to przypadki szczególne.
   Pozostałe cztery proste mają równania kierunkowe $y = ax + b$, gdzie:

   - $\boldsymbol{a}$ (współczynnik kierunkowy) to stosunek przyprostokątnych zielonych trójkątów ("pion przez poziom") z uwzględnieniem znaku:

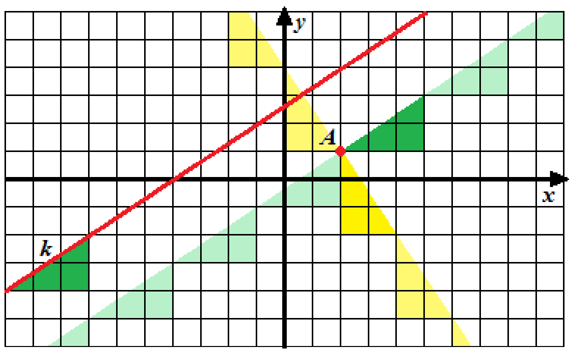
     "**+**" jeśli te proste "wznoszą się",
     "**-**" jeśli te proste "opadają";

   - $\boldsymbol{b}$ to po prostu punkt przecięcia prostej z osią rzędnych; w przypadku prostej nr 6 $\boldsymbol{b}$ można wyznaczyć odpowiadając na pytanie: o ile "opadnie" prosta, jeśli z punktu kratowego $(-1,5)$ przesuniemy się o jednostkę w prawo (a wiemy o ile "opadnie", gdy przesuniemy się o 3 jednostki w prawo!).



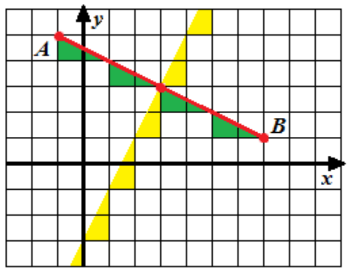
4. **Proste prostopadłe i równoległe.** Narysuj dwie proste przechodzące przez punkt *A*, jeśli jedna z nich jest równoległa, a druga prostopadła do prostej *k*. Odczytaj równania tych prostych.

   Wskazówka: Wystarczy "powiesić" na dwóch sąsiednich punktach kratowych prostej *k* zielony trójkąt, a następnie dorysować do punktu *A* odpowiednie trójkąty: "równoległy" (zielony) i "prostopadły" (żółty). Jeśli wyobrazimy sobie dorysowane kolejne trójkąty, to pojawi się prosta.



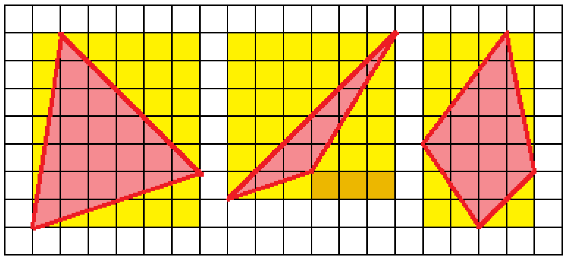
5. **Symetralna odcinka.** Narysuj symetralną odcinka *AB*. Odczytaj równanie tej symetralnej.

Wskazówka: Symetralna jest prostopadła do odcinka i przechodzi przez jego środek.



6. **Pola wielokątów.** Odczytaj pola różowych wielokątów.

Wskazówka: Od pola odpowiedniego prostokąta można odjąć pola żółtych trójkątów (prostokąta).



7. **Pole trójkąta.** Jakie pole ma trójkąt, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $x - y - 3 = 0$, $x - 7y + 9 = 0$ i $2x + y + 3 = 0$?
Wskazówka: narysuj te proste i odczytaj z rysunku wierzchołki trójkąta. Dalej jak w zadaniu 6.

B. Geometria analityczna - podstawowe metody.

8. **Długość odcinka.** Wyznacz długość odcinka *AB*, jeśli:

a) $A = (4, -2)$, $B = (-2,6)$, b) $A = (-5,2)$, $B = (2,1)$, c) $A = (-5,2)$, $B = (0, -3)$.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ lub po prostu "zobacz" trójkąt prostokątny i posłuż się twierdzeniem Pitagorasa.

9. **Środek odcinka.** Wyznacz środek odcinka *AB* dla punktów z zadania1. Narysuj odcinek *AB* i jego środek.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru: $M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

10. **Współczynnik kierunkowy prostej.** Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej *AB* dla punktów z zadania 1.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru: $a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ("pion przez poziom", czyli iloraz różnicy rzędnych przez różnicę odciętych lub tangens kąta nachylenia prostej do osi *x*).

11. **Równanie kierunkowe prostej po raz pierwszy.** Wyznacz parametr w równaniu prostej, tak aby przechodziła przez punkt $A = (-2,3)$:
a) $y = -2x + b$, b) $y = ax + 4$.
Wskazówka: Podstaw współrzędne punktu A w miejsce *x* i *y* do równania prostej i rozwiąż równanie z jedną niewiadomą (niewiadomą jest parametr).

12. **Równanie kierunkowe prostej po raz drugi.** Wyznacz równanie prostej o współczynniku kierunkowym $a = -3$ przechodzącej przez punkt $A = (2, -1)$.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru: $y - y_A = a(x - x_A)$.

13. **Równanie kierunkowe prostej po raz trzeci.** Wyznacz równanie prostej *AB* jeśli $A = (-1,1)$, $B = (2,3)$.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru: $y - y_A = a_{AB}(x - x_A)$.

14. **Równanie ogólne prostej.** Narysuj prostą o równaniu $2x - 3y - 6 = 0$.
Wskazówka: Wystarczy narysować dwa punkty, a najłatwiej wyznaczyć punkty przecięcia prostej z osiami współrzędnych: po wstawieniu do równania 0 w miejsce *y* łatwo wyznaczyć punkt przecięcia prostej z osią *x*, a po wstawieniu 0 w miejsce *x* analogicznie łatwo wyznacza się punkt przecięcia prostej z osią *y*.

15. **Prosta równoległa.** Wyznacz równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $A = (-1,3)$ i równoległej do prostej k o równaniu $y = 2x$.
Wskazówka: W równaniu prostej *l*: $y = a_l x + b$ wstaw za *a*, *x* i *y* odpowiednie liczby, i wyznacz *b*.

16. **Prosta prostopadła.** Wyznacz równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $A = (5, -2)$ i prostopadłej do prostej k o równaniu $y = \frac{3}{2}x$.
Wskazówka jak w zadaniu 7, współczynnik kierunkowy a_l wyznacz z warunku prostopadłości prostych: $a_l \cdot a_k = -1$.

17. **Równanie okręgu po raz pierwszy**. Jaki środek i promień ma okrąg o równaniu: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$? Narysuj ten okrąg i podaj współrzędne wszystkich punktów kratowych (o współrzędnych całkowitych) należących do tego okręgu.
Wskazówka: Równanie kanoniczne okręgu o środku w punkcie (p, q) i promieniu *r* ma postać: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.

18. **Równanie okręgu po raz drugi.** Punkt $A = (-3,4)$ należy do okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$. Napisz równanie kanoniczne tego okręgu.
Wskazówka: Do równania brakuje jedynie promienia, a ten ma długość odcinka AO.

19. **Równanie okręgu po raz trzeci.** Wyznacz parametr *m* tak, aby punkt $P(-1, m)$ należał do okręgu o równaniu: $x^2 + (y-1)^2 = 2$.
Wskazówka: Punkt *P* należy do okręgu, jeśli jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu, czyli wstawione w miejsce *x* i *y* zamienią równanie okręgu w równanie z niewiadomą *m*, które następnie trzeba rozwiązać.

20. **Równanie okręgu po raz czwarty.** Narysuj okrąg o równaniu: $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -5$.
Wskazówka: Wpisz odpowiednie liczby w ramki, tak aby wyrażenia w nawiasach dały się "zwinąć" wzorami skróconego mnożenia: $(x^2 - 2x + \boxed{}) + (y^2 + 6y + \boxed{}) = -5 + \boxed{} + \boxed{}$. Następnie odczytaj współrzędne środka i promień okręgu. Do rysunku wykorzystaj odpowiednie punkty kratowe.

Piotr Kryszkiewicz