Planimetria 1 - zadania przygotowawcze do sprawdzianu

1. Sinus kąta ostrego α ma wartość 0,2. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.
   Wskazówka: Narysuj trójkąt prostokątny z odpowiednimi bokami, oblicz długość dłuższej przyprostokątnej, a następnie odczytaj wartości funkcji.
   Odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{6}$, $tg\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$, $ctg\,\alpha = 2\sqrt{6}$.

2. Tangens kąta ostrego α ma wartość 7. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.
   Odpowiedź: $ctg\,\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\alpha = \frac{7}{10}\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

3. Wiadomo, że $tg\alpha = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha}$.
   Wskazówka: Zadanie można rozwiązać wyznaczając wartości sinusa i cosinusa z odpowiedniego trójkąta. Jest prostsza metoda: tangens to stosunek sinusa do cosinusa, stąd $\sin\alpha = 2\cos\alpha$, co po wstawieniu do wyrażenia i skróceniu cosinusa daje wynik.
   Odpowiedź: $\frac{4}{3}$

4. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 14, a sinus jednego z kątów ostrych ma wartość $\frac{5}{7}$. Oblicz pole tego trójkąta.
   Wskazówka: Narysować trójkąt prostokątny z bokami $x, y, 14$. Jedną niewiadomą znajdujemy z sinusa, a drugą z tw. Pitagorasa.
   Odpowiedź: Pole wynosi $20\sqrt{6}$.

5. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 5, a druga jest o 1 krótsza od przeciwprostokątnej. Wyznacz obwód i pole tego trójkąta.
   Wskazówka: Oznacz boki trójkąta prostokątnego, np.: $5, x-1, x$, a następnie ułóż równanie (tw. Pitagorasa) i rozwiąż je.
   Odpowiedź: obwód wynosi 30 (j), pole 30 (j^2).

6. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę trzykrotnie większą od drugiego kąta ostrego. Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta.
   Wskazówka: Oznacz kąty ostre za pomocą jednej niewiadomej, następnie ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie (suma kątów trójkąta).
   Odpowiedź: $22{,}5° = 22°30'$ i $67{,}5° = 67°30'$.

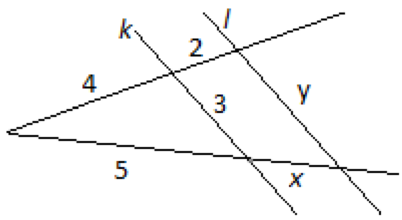
7. Jeden z kątów równoległoboku ma 3,5 razy większą miarę niż drugi kąt tego równoległoboku. Wyznacz te kąty.
   Wskazówka: Oznacz wszystkie kąty równoległoboku za pomocą jednej niewiadomej, następnie ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie (suma kątów równoległoboku).
   Odpowiedź: $40°$ i $140°$.

8. Oblicz promienie kół: wpisanego w trójkąt i opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 15 i 8.
   Wskazówka: promień koła wpisanego w (dowolny) trójkąt to stosunek pola do połowy obwodu tego trójkąta.
   Odpowiedź: $r = 3$, $R = 8{,}5$.

9. Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 i ramieniu długości 5.
   Wskazówka: Należy wyznaczyć wysokość opuszczoną na podstawę (trójkąt "egipski"!), co pozwoli obliczyć, dalej jak w zadaniu 8.
   Odpowiedź: $r = 1{,}5$.

10. Pole koła wpisanego w trójkąt równoboczny ma wartość 3π. Jakie pole ma koło opisane na tym trójkącie?
    Wskazówka: Każde dwa koła są podobne, więc stosunek pól to kwadrat skali podobieństwa, a skala podobieństwa kół to stosunek promieni. Wystarczy wiedzieć gdzie leży środek obu okręgów (wspólny w przypadku tego trójkąta).
    Odpowiedź: 12π.

11. Oblicz x i y jeśli proste k i l są równoległe
    Odpowiedź: $x = 2{,}5$, $y = 4{,}5$.



12. Przekątna kwadratu jest o 6 dłuższa od boku. Oblicz pole i obwód tego kwadratu.
    Wskazówka: ułożyć i rozwiązać równanie z niewiadomą, którą jest długość boku kwadratu.
    Odpowiedź: pole jest równe $36(\sqrt{2}+1)^2 = 36(3+2\sqrt{2})$, a obwód $24(\sqrt{2}+1)$.

13. Promień okręgu wpisanego w kwadrat jest o 2 krótszy od promienia okręgu opisanego na tym kwadracie. Oblicz pole kwadratu.
    Wskazówka: Ułożyć i rozwiązać równanie z jedną niewiadomą (np. r - promień okręgu wpisanego w kwadrat).
    Odpowiedź: $16(3 + 2\sqrt{2})$.

14. Przekątna rombu o polu 18 ma długość 6. Oblicz obwód tego rombu.
    Wskazówka: Pole rombu to połowa iloczynu jego przekątnych. Przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne.
    Odpowiedź: $12\sqrt{2}$ (ten romb jest kwadratem).

15. Kąt ostry rombu o obwodzie 24 ma miarę $30°$. Oblicz pole tego rombu.
    Wskazówka: Pole rombu to iloczyn długości boku i wysokości, którą można wyznaczyć z trójkąta prostokątnego z kątem ostrym 30°.
    Odpowiedź: 9.

16. Pole równoległoboku o bokach długości 10 i 6 jest równe $30\sqrt{2}$. Wyznacz kąty tego równoległoboku.
    Wskazówka: Pole równoległoboku, to iloczyn długości boku (10) i wysokości. Po obliczeniu wysokości łatwo stwierdzić jaki jest kąt ostry równoległoboku.
    Odpowiedź: $45°$ i $135°$.

17. Kąt ostry trapezu prostokątnego o podstawach długości 4 i 2 ma miarę $60°$. Oblicz pole tego trapezu.
    Wskazówka: Narysować trapez z krótszą przekątną i się mu przyjrzeć.
    Odpowiedź: $6\sqrt{3}$.

18. Trapez równoramienny o podstawach długości 12 i 8, i polu 40, podzielono na dwa mniejsze trapezy odcinkiem łączącym środki ramion. Oblicz pola i obwody obu trapezów.
    Wskazówka: Wysokość łatwo obliczyć z pola. Po odpowiednim narysowaniu wysokości łatwo wyznaczyć długość ramienia. Długość odcinka łączącego środki ramion to średnia arytmetyczna długości podstaw.
    Odpowiedź: Pola: 22 i 18, obwody: $22 + 2\sqrt{5}$ i $18 + 2\sqrt{5}$.

19. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 4, a pozostałe boki mają długość 2. Oblicz miary kątów tego trapezu, długość przekątnej oraz pole.
    Wskazówka: Narysować trapez i dwie jego wysokości (albo podzielić go na trzy trójkąty).
    Odpowiedź: kąty: $60°$ i $120°$, przekątna: $2\sqrt{3}$, pole: $3\sqrt{3}$.

20. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 21 i 3, a ramiona mają długość 15. Oblicz pole trapezu oraz pola trójkątów, na które dzielą ten trapez jego przekątne.
    Wskazówki: Aby wyznaczyć wysokość trapezu: narysować dwie wysokości dzielące trapez na dwa trójkąty i prostokąt i przyjrzeć się tym trójkątom. Aby wyznaczyć pola trójkątów: zastosować skalę podobieństwa dwóch trójkątów z podstawami 21 i 3.
    Odpowiedź: Pole 144, pola trójkątów: $2\frac{1}{4}$, $15\frac{3}{4}$, $15\frac{3}{4}$, $110\frac{1}{4}$.

Piotr Kryszkiewicz