Funkcje wykładnicze i logarytmy - zadania elementarne z rozwiązaniami

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz stosując własności potęg (bez używania kalkulatora): $\frac{18^4\cdot 125^3}{75^5\cdot 2^5}$.

   Rozwiązanie: Występujące w tym wyrażeniu potęgi można łatwo sprowadzić do potęg liczb 2, 3 i 5: $18^4=(2\cdot 3^2)^4=2^4\cdot 3^8$, $125^3=(5^3)^3=5^9$, $75^5=(3\cdot 5^2)^5=3^5\cdot 5^{10}$. Po podstawieniu otrzymanych potęg wystarczy je poskracać: $\frac{18^4\cdot 125^3}{75^5\cdot 2^5}=\frac{2^4\cdot 3^8\cdot 5^9}{2^5\cdot 3^5\cdot 5^{10}}=\frac{3^3}{2\cdot 5}=\frac{27}{10}=2{,}7$.

2. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2 następujące wyrażenia:
   a) $(4^{-2}:8^{-3})^{-2}:16^{-2}$, b) $(-2)^{-3}\cdot(-4^{-3})\cdot(-8)^{-4}\cdot(-16^{-4})$

   Rozwiązanie:
   a) $(4^{-2}:8^{-3})^{-2}:16^{-2}=(2^{-4}:2^{-9})^{-2}:2^{-8}=(2^5)^{-2}\cdot 2^8=2^{-10}\cdot 2^8=2^{-2}$.
   b) Oto kolejne cztery czynniki:
   $(-2)^{-3}=-2^{-3}$ (ten czynnik jest ujemny),
   $-4^{-3}=-(2^2)^{-3}=-2^{-6}$ (ten czynnik też jest ujemy),
   $(-8)^{-4}=8^{-4}=(2^3)^{-4}=2^{-12}$ (czynnik dodatni),
   $-16^{-4}=-(2^4)^{-4}=-2^{-16}$ (znowu czynnik ujemny)
   Ostatecznie wynik będzie ujemny (trzy czynniki ujemne):
   $(-2)^{-3}\cdot(-4^{-3})\cdot(-8)^{-4}\cdot(-16^{-4})=-2^{-3}\cdot 2^{-6}\cdot 2^{-12}\cdot 2^{-16}=-2^{-3-6-12-16}=-2^{-37}$.

Potęga o wykładniku wymiernym

3. Oblicz wartość liczbową wyrażenia: $27^{-\frac{2}{3}}\cdot 4^{1,5}\cdot(0{,}064)^{-0,(3)}$.
   Rozwiązanie: Oto każdy z czynników z osobna:
   $27^{-\frac{2}{3}}=\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}=3^{-2}=\frac{1}{9}$,
   $4^{1,5}=4^{1+\frac{1}{2}}=4\cdot 4^{\frac{1}{2}}=4\cdot 2=8$,
   $(0{,}064)^{-0,(3)}=\left(\frac{64}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1000}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1000^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.
   Stąd: $27^{-\frac{2}{3}}\cdot 4^{1,5}\cdot(0{,}064)^{-0,(3)}=\frac{1}{9}\cdot 8\cdot\frac{5}{2}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}=2,(2)$.

4. Wyrażenie $\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[4]{32}}}$ przedstaw w postaci potęgi liczby 2 oraz w najprostszej postaci zawierającej pierwiastek.
   Rozwiązanie:
   $$\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[4]{32}}}=\left(4\cdot\left(2\cdot 32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2\cdot 32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 32^{\frac{1}{24}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{5}{24}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}}=2^{\frac{25}{24}}=2\cdot\sqrt[24]{2}.$$

Potęga o wykładniku niewymiernym

5. Oblicz $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}-\left(\sqrt{2}^{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

   Rozwiązanie: Odjemna: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\sqrt{2}^{4}=4$,

   odjemnik: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}^{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}^{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\left(2^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=2^{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=$

   $2^{5-3}=2^2=4$. Stąd $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}-\left(\sqrt{2}^{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4-4=0$.

Funkcja wykładnicza

6. Wiadomo, że wykres funkcji $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt (2,9). Wyznacz wzór tej funkcji oraz uzupełnij współrzędne dwóch innych punktów z wykresu funkcji *f*: $A(-1, \_)$, $B(\_, 81)$.

Rozwiązanie: Najpierw należy wyznaczyć (dodatnią) wartość a. W tym celu podstawiamy współrzędne punktu (2, 9) do wzoru funkcji (współrzędne punktu z wykresu funkcji muszą spełniać równanie opisujące tę funkcję): $9 = f(2)$, czyli $9 = a^2$, co po spierwiastkowaniu daje $|a| = 3$, czyli $a = \pm 3$, a ponieważ $a > 0$, to $a = 3$. Zatem funkcja opisana jest wzorem: $f(x) = 3^x$.
Teraz uzupełnienie współrzędnych punktów *A* i *B*.
Druga współrzędna punktu *A*, to po prostu $f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, co daje punkt $A = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$.
Aby obliczyć pierwszą współrzędną punktu *B* należy rozwiązać równanie $f(x) = 81$, czyli $3^x = 81 = 3^4$. Ponieważ funkcja wykładnicza $y = 3^x$ jest różnowartościowa i $3^x = 3^4$, więc $x = 4$ i $A = (4, 81)$.

7. Opisz w jaki sposób należy przekształcić wykres funkcji $y = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \frac{2^x - 6}{2}$.

Rozwiązanie: Najpierw należy przekształcić wzór funkcji *f* do postaci kanonicznej $f(x) = 2^{x-p} + q$, co pozwoli odczytać wektor przesunięcia $[p, q]$ wykresu funkcji $y = 2^x$.
$f(x) = \frac{2^x - 6}{2} = \frac{2^x}{2} - 3 = 2^{x-1} - 3$. Oznacza to, że wykres funkcji $y = 2^x$ należy przesunąć o wektor $[1, -3]$, czyli o jeden w prawo i 3 w dół.

8. Podane trzy liczby ustaw w kolejności rosnącej: $\sqrt{3^{-3}}$, $\frac{1}{3^{\sqrt{2}}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie: Wystarczy podane liczby przedstawić jako potęgi o takiej samej podstawie: 3 lub $\frac{1}{3}$.
Sposób I (podstawa 3) $\sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{-1,5}$, $\frac{1}{3^{\sqrt{2}}} = 3^{-\sqrt{2}} \approx 3^{-1,4}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} = 3^{-\sqrt{3}} \approx 3^{-1,7}$.
Funkcja $y = 3^x$ jest rosnąca, co oznacza, że im *większy* wykładnik *x*, tym *większa* wartość 3^x.
Oto wykładniki ułożone rosnąco: $-\sqrt{3}$, $-1{,}5$, $-\sqrt{2}$, zatem liczby należy ustawić tak: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3^{-3}}$, $\frac{1}{3^{\sqrt{2}}}$.
Sposób II (podstawa $\frac{1}{3}$) $\sqrt{3^{-3}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}$, $\frac{1}{3^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} \approx \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} \approx \left(\frac{1}{3}\right)^{1,7}$.
Funkcja $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ jest malejąca, co oznacza, że im *mniejszy* wykładnik *x*, tym *większa* wartość $\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Po ustawieniu wykładników malejąco: $\sqrt{3}$, $1{,}5$, $\sqrt{2}$ otrzymujemy to samo rozwiązanie, co poprzednio.

Logarytm

9. Oblicz x, jeśli: a) $x = \log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[9]{9}$, b) $\log_x 0{,}25 = -2$, c) $\log_{0,125} x = -\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie. W każdym przypadku należy skorzystać z definicji logarytmu:
a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^x = \sqrt[9]{9} \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^x = 9^{\frac{1}{9}} \Rightarrow 3^{\frac{x}{3}} = 3^{\frac{2}{9}} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.
b) $x^{-2} = 0{,}25 \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, ale $x > 0$, więc $x = 2$.
c) $x = (0{,}125)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1000}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1000}{125}}\right)^2 = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 2^2 = 4$.

10. Przyjmując, że $\log_3 5 = a$, wyznacz: a) $\log_3 75$, b) $\log_{27} 25$, c) $\log_{15} 9$

Rozwiązanie:
a) $\log_3 75 = \log_3(3 \cdot 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2\log_3 5 = 1 + 2a$,
b) $\log_{27} 25 = \log_{3^3} 5^2 = \frac{2}{3}\log_3 5 = \frac{2}{3}a$,
c) $\log_{15} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 15} = \frac{2}{\log_3(3 \cdot 5)} = \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 5} = \frac{2}{1+a}$.

Piotr Kryszkiewicz